



TITLE:

鉛直に加振した粒状体を伝わる密度波と表面変形 (非線形波動現象の研究の新たな進展)

AUTHOR(S):

佐野, 理

CITATION:

佐野, 理. 鉛直に加振した粒状体を伝わる密度波と表面変形 (非線形波動現象の研究の新たな進展). 数理解析研究所講究録 2012, 1800: 171-183

ISSUE DATE:

2012-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/173018>

RIGHT:

鉛直に加振した粒状体を伝わる密度波と表面変形 Density wave propagation in vertically vibrating granular layer and its surface deformation

東京農工大・院工・物理 佐野 理 (Osamu Sano)
Department of Applied Physics
Tokyo University of Agriculture and Technology

1 はじめに

砂やガラスビーズ, 胡麻や小豆などの粒の集合体 (粒状体) を鉛直に振動させると, 流体の場合に類似した対流や波動現象が発生することは古くから知られている¹⁾. このような粒子集団では外力による励起が“ある臨界値”を超えなければ相対的に静止しているが, それ以上になると動き出す (固液相転移). しかし, この系では粒子間の衝突におけるエネルギー散逸が大きいので, つねに外部から仕事を与えていなければ流動は止まってしまう. また, 仮に流動の起こる条件下でも系全体が一様な平衡状態になることはまれであり, 粒状体領域の境界付近と内部領域では粒子の挙動も異なる. 粒状体の巨視的な挙動 (パターン) は, 振動の振幅や振動数などの外的条件によるだけでなく, 系を構成する粒子の大きさやその分布, 形状, 摩擦係数などによっても異なるし, 時間的な変動も伴っている. このように粒状体は大変複雑な系であるが, 近年になって科学上の基礎的な問題として再び注目を集め^{2,3)} 実験的・数值的・解析的研究が急速に進んでいる. 以下では条件を単純化し, 単一粒径の球形粒子を容器に入れ, 単一振動数の正弦波振動を加えた場合について扱う.

振動する粒状体薄層に見られる波の鉛直断面形の時間変動⁴⁻⁸⁾ や水平に置かれた粒状体薄層の平面形⁹⁻¹⁴⁾ についてはすでにいくつかの研究報告がある. ここでは, 主として狭い間隔で鉛直に立てられた壁を持つ容器に粒状体を入れ, 鉛直方向に加振したときに見られる「撓み波」(undulation) や「さざ波」(ripple) に焦点を絞り報告する. とくにこれらのパターンの発生や維持機構のもとになっている粒子間の圧密状態の変動, すなわち密度波の存在や, この伝播方向の曲がりやと表面変形の関係を最新のデータに基づき紹介する.

2 実験装置および実験結果

図 1 に, 本実験で用いた実験装置の概略図を示す. 粒状体を入れる容器は薄型直方体 (縦 $H = 100\text{mm}$, 横 $L = 100\text{mm} \sim 140\text{mm}$, 奥行 $W = 3 \sim 10\text{mm}$) である. これを加振機の上に鉛直に取付け, ファンクション・シンセサイザーとアンプを用いて, 指定された振動数, 振幅で上下に加振する. 振動波形は正弦関数, 振動数 $f = 15 \sim 60\text{Hz}$, 振幅 $a = 0.1 \sim 5.0\text{mm}$ とした. 使用している粒状体は, 主として直径 $d = 0.10 \pm 0.01\text{ mm}$ の鉛球である. 観測にはフレームレートが $250 \sim 2000/\text{s}$ の高速度ビデオカメラを用いた. 画像の解像度は 512×512 ピクセルである.

2.1 振動パターンの断面形

観測された代表的な波の例 (スナップショット) を図 2 に示す. 各々の写真の両端は容器の側壁までの全範囲を示している. 最下段の写真 R は「さざ波」, その上の 6 個の写真は「撓み波」である. 後者で波 (アーチの数) が 3 個, 4 個, 5 個, ... のように整数個含まれているものをそれぞれ S_3, S_4, S_5, \dots , また, 3.5 個, 4.5 個, ... のように半整数個含まれているものをそれぞれ A_4, A_5, \dots などと名付ける. 後述するように, さざ波は流体を鉛直加振し

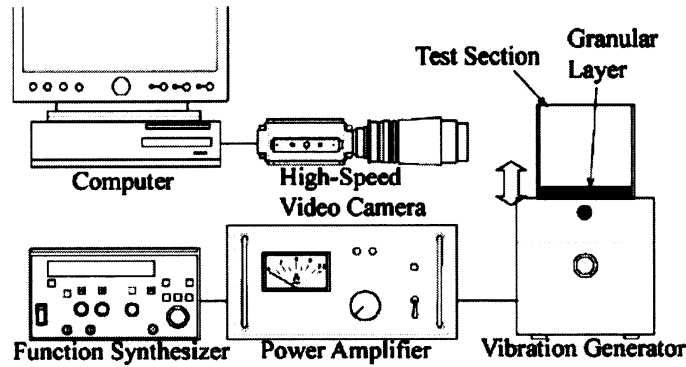


Figure 1: 実験装置概略.

た時に見られるパラメトリック励振の表面波に類似している。表面変形の繰り返し周期は外部振動の周期 $T (= 1/f)$ の2倍になっており、波の頂部と谷は時間 T ごとに交代する。これは $f/2$ -rippleと呼ばれている（これに対して4倍の周期を持つ波もあり、パターンが $4T$ の周期で繰り返されるので $f/4$ -rippleと呼ばれる）。流体の波に比べて、波の縦横比が大きい、カスプ状の頂部や層全体が容器底面から離れている時間帯が存在する、などの違いがある。他方、撓み波は層の厚さがほぼ一定で、全体がいくつかの湾曲したアーチの連なりからなっている。アーチの足部は常に容器の底面に接しており、アーチの頂部と足部は時間 T ごとに入れ替わるので、パターンの周期は $2T$ である。撓み波は容器側壁にほぼ垂直になるので、図2のような整数個または半整数個のアーチが見られる。

2.2 波の発生領域

図3はさざ波や撓み波の観測される外部加振の振動数 f と振幅 a のダイヤグラムである。異なったパターンの生じる領域が重なっている部分は、主として容器の底面が粒子層に衝突するときの位相の違いによるものと思われる。すなわち、同じ振動数、振幅で加振していても、図4(a)のように層の底面が容器の底面とほぼ同じ速度で衝突する“ソフトな衝突”の場合と、図4(b)のように両者が正面衝突する“ハードな衝突”の場合とでは、形成されるパターンは異なってくる。その結果、前者では衝突の衝撃が弱くて撓み波を、後者では衝撃が強くてさざ波を生じることになる。

2.3 さざ波の波長

図5(a)は、さざ波の波長 λ と粒状体の層厚 h の関係を示したものである。縦横軸とも g/f^2 でスケールしている (g は重力加速度)。データ点の記号の違いは加振の振動数 f あるいは粒径 d の違いを表す。波が十分発達したのちには波長 λ はほぼ同一の曲線上にあり、巨視的な物理量である層厚 h でのスケールが妥当と考えられる。他方、図5(b)は同じデータを粒径 d でスケールしたものであり、発達したのちの波では d でスケールした波長 λ/d は層数ごとに一定ではあるものの、その値は条件ごとに異なっている。しかし、波の発生する臨界層数 N_c は一致していて、ほぼ3層と考えられる。これらをまとめると、さざ波の発生には粒子が何層積まれているかというミクロな条件が、また、ひとたび波が発生した後の挙動には層の厚さというマクロな条件が重要となっていることになる。したがって、例えば粒径が $d/2$ の粒子を $2N$ 層積んだ場合の波長は、粒径 d の粒子を N 層積んだ場合の波長と同じである。しかし、同じ層厚 h であっても、粒径が大きくて層数 $N (= h/d)$ が3以下となる場合には集団的な運動は見られない¹⁷⁾。

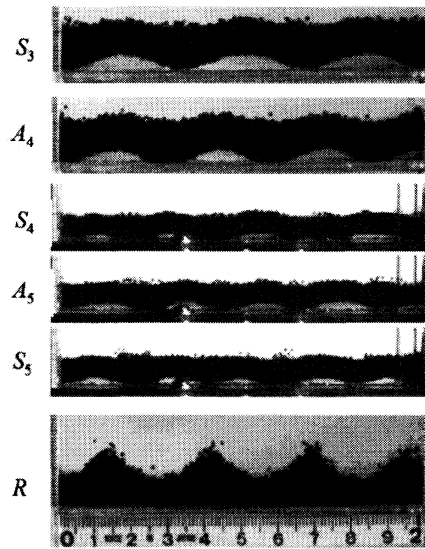


Figure 2: 鉛直に加振した粒状体の振動パターン断面図。粒子は直径 $d = 1.0$ mm の鉛球。容器の水平長さ L は S_3, A_4, R では 100 mm, それ以外では 140 mm, また奥行き W はすべて 10 mm である。実験条件の詳細は参考文献 18 を参照。

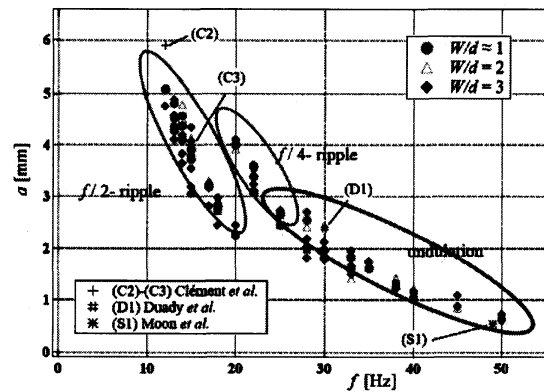


Figure 3: パターン出現領域。加振の振動数 f と振幅 a 依存性。

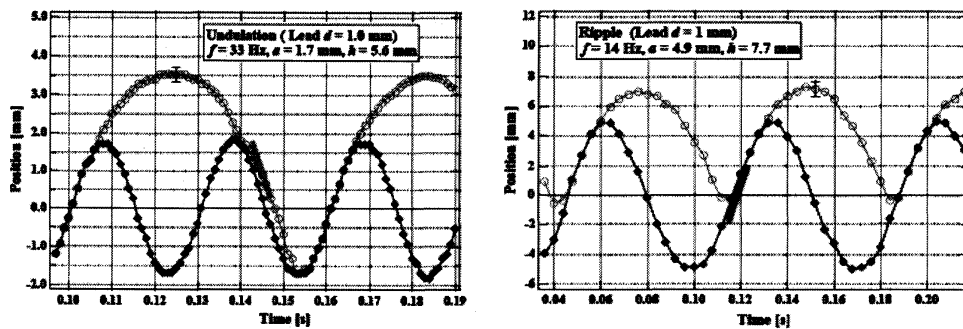


Figure 4: 容器底面の位置 (下部の黒点) と粒状体最下層粒子の位置 (上部の白抜き点) の時間変化。

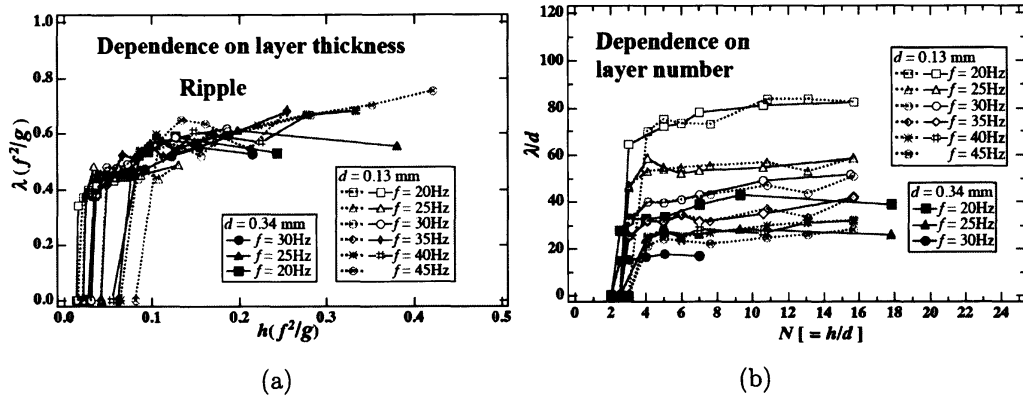


Figure 5: さざ波の波長と粒状体の層厚 h , 層数 $N (= h/d)$ 依存性.

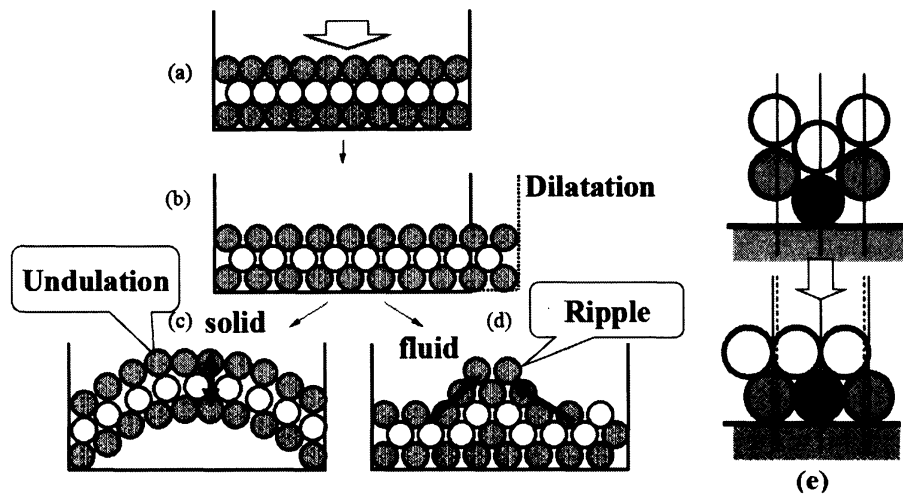


Figure 6: 粒状体層の鉛直圧縮とダイラレーション.

これらの結果に基づいて、波の発生機構を定性的に図解すると図6のようになる。すなわち、容器底面の上方への運動と粒子層の落下により粒層が上下に圧縮され、粒子が相互に貫入しようとする、排除体積効果により図6 (b), 6 (e) のように最下層の粒子は水平方向に膨張せざるを得ない。この割合は最大で $2/\sqrt{3} = 1.15\dots$ 倍になる。すなわち、水平方向に並ぶ粒子約6個につき1個分のスペースが不足する。ところが、水平方向の膨張が側壁などにより制限されていると、これを解消するために図6 (c) のように層全体が湾曲するか、あるいは図6 (d) のように層の表面付近の粒子が流動するかのいずれかの振舞いをとることになる。この様子は構成粒子の軌道を追ってみるとさらに明確に確認できる。すなわち、前者では粒子間の相対的な位置をほぼ保ったまま、層全体が撓むような挙動となるのに対して、後者では個々の粒子が流体の場合に類似したループ状の軌道を示し、最上部の粒子の輪郭は波動運動として観測される。

2.4 分散関係

さざ波の分散関係をみると、初期には

$$\lambda = \lambda_{\min} + \frac{g_{\text{eff}}}{f^2} \quad (1)$$

が提案されていた⁷⁻¹²⁾。これは無限小振幅の水面波の分散関係 (位相速度 v_{ph}) :

$$v_{\text{ph}} = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)}$$

において、 $kh \gg 1$ と近似した深水波 (重力波) の分散関係 $\lambda = g/(2\pi f^2)$ とのアナロジーに基づくが、粒状体ではある臨界値に達しなければ波は発生しないのでカットオフを導入したものとなっている。しかし、その後の詳細な研究では、例えば

$$\frac{\lambda}{h} = \text{const.} + \left(f \sqrt{\frac{h}{g}} \right)^{\alpha}, \quad \alpha = -1.32 \pm 0.03 \quad (2)$$

$$\frac{\lambda}{h} \propto \left(f \sqrt{\frac{h}{g}} \right)^{\alpha}, \quad \alpha = -1.47 \quad (3)$$

のような非整数ベキの分散関係がさまざまに提案され^{13,15)}、統一的な理解には至っていなかった。その原因を探るために、われわれは層厚を系統的に変えて分散関係を調べた。その結果、ある程度以上の層厚になると層の領域全体が流動状態になることはなく、さざ波の形成に寄与する粒子群が上層部に限られていることを確認した。したがって、分散関係も層全体の厚さ h ではなく実効的な層厚 h^* を使うべきで、このことが分散関係の混乱の原因と思われる。

2.5 粒子運動と密度波の伝播

前節の結果は、粒子の挙動を精密に観測することにより明確に確認できる。図7は撓み波における粒子挙動を毎秒2000フレームの高速度ビデオカメラで撮影し、連続する画像を一定間隔ごとに差し引いたものである。ただし、容器底面の位置は揃えてある。2枚の画像間で変化のあった部分は白く、それ以外は黒くなっている。したがって、例えば最上部の図7(a)では、アーチ状の層の足の部分は容器底面との衝突によって圧密され、相対運動が生じていないために黒くなっている部分である。時間の経過とともにこの部分は層に沿って移動していく。これは密度波で、その伝播速度はおおよそ40 m/sとなっている。通常の固体中の弾性波の伝播速度に比べて2桁程度も遅く、この媒質が極めて“柔らかい”物性をもった弾性体と解釈することもできる。

図8は、さざ波における粒子の相対運動を示したものである。この図を描くにあたり、粒径 $d = 1.9 \text{ mm}$ の鉛球を12層重ね、 $f = 25 \text{ Hz}$ 、 $a = 1.4 \text{ mm}$ で加振したときに得られるさざ波を高速度ビデオカメラで撮影し、画像から個々の粒子の位置を測定した。さざ波の場合には、層全体が上下に大きく変動するので、層の最下層粒子を基準として他の粒子の相対位置を中抜きで示している。パターン周期 $2T$ は80 msであり、図8の各図は1 msごとの画像を10枚重ねている。図の中で、中抜きの円が識別できるものは10 msの間、粒子が相対的に静止していたことを示し、これらの占める領域は固体 (弾性体) 的な振舞いであったことになる。逆に、円が連なって見えるものはこの時間内に粒子の移動が起こっていたことを示し、こうした粒子群の占める領域は流体的であることになる。な



Figure 7: 撓み波における圧密領域の伝播. 粒子は直径 $d = 1.0$ mm の鉛球. 外部加振の振動数 $f = 30.0$ Hz, 振幅 $a = 2.10$ mm. 黒くなっている部分は圧密により粒子の相対位置が変わっていないことを示しており, この圧密領域が密度波としてアーチの足部から頂部に向かって伝播する過程が繰り返されている. (参考文献 19 の図を一部改変)

お, 各図の中で太い輪郭線で描かれた円は, それぞれの粒子の初期画面での位置である. 固体領域と流体領域の境界は, 波の谷付近で底面に近い部分から左右両方向にやや上向きに移動し, やがて山と谷が入れ替わるような表面変位を生じる. したがって, さざ波においては粒子密度の波が進行方向を曲げながら伝播し, 変形前の水平な表面に垂直に交わるところが波の頂部に対応している. この構造の繰り返しの空間周期が波長 λ を決定していると思われる.

3 理論モデル

前節の実験結果に基づき, 撓み波とさざ波のモデルを検討する.

3.1 弾性板の座屈と撓み波

図2に示した撓み波のモードは弾性板の座屈と考えて説明することが可能である¹⁸⁾. すなわち, 粒層が上下に圧縮され, 相互に粒子が貫入すると水平方向に膨張しようとするが, 容器の壁によりそれが制限されると, 粒層は左右から圧縮された状態になる. その結果, ある臨界値を超えたところで座屈が生じる. よく知られているように, 長さ L , 幅 W , 高さ h , 実効的なヤング率が E^* の直方体弾性板において, 板に沿う方向に力 F を加えたとき, それに垂直な方向の変位は

$$-\frac{E^* I}{R} = F \sin \theta, \quad \frac{d^2 \theta}{ds^2} = -\alpha^2 \sin \theta, \quad (4a)(4b)$$

ただし,

$$\alpha = \sqrt{\frac{F}{E^* I}}, \quad I = \frac{Wh^3}{12}$$

で与えられる. ここで, R は板の曲率半径, s は板の長さに沿って測った座標, θ は板の上の各点での接線と水平軸 (x 軸) の間の角度である. この方程式の解は楕円関数を用いて

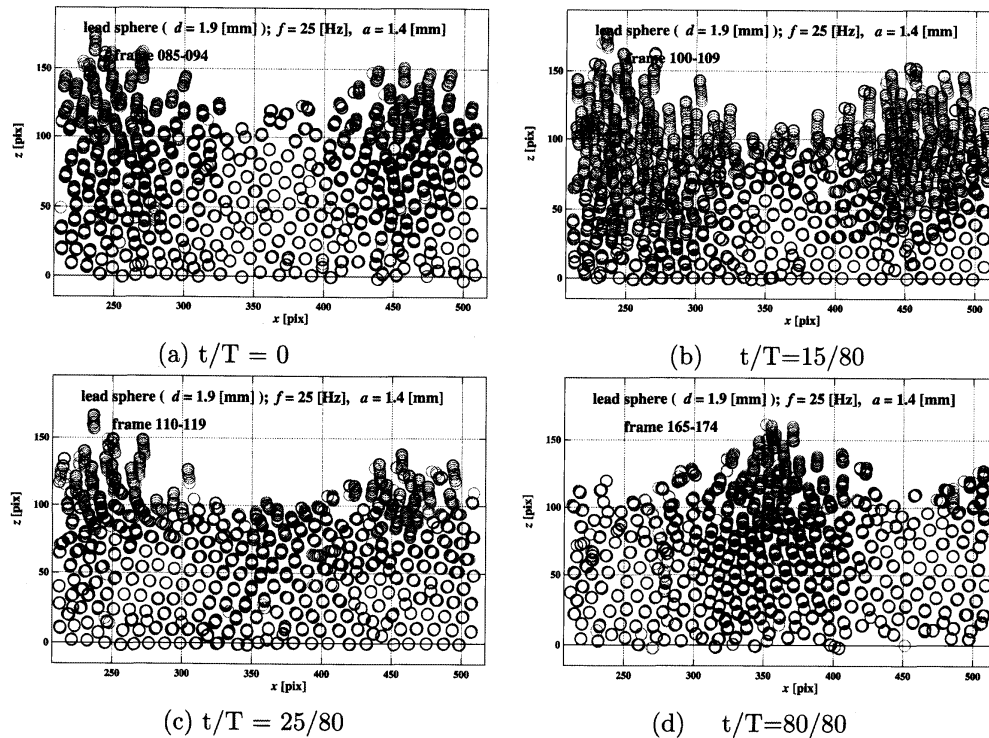


Figure 8: 粒子は鉛球 ($d = 1.9$ [mm]). 加振条件は $f = 25$ [Hz], $a = 1.4$ [mm]. 加振の1周期 T は80フレームに対応する. さらに詳しい説明は本文を参照. (参考文献 21 より抜粋)

表され,

$$x = \frac{2}{\alpha} \left[E(\text{am}(\alpha s), k) - \frac{1}{2} \alpha s \right] = \frac{2}{\alpha} \left[Z(\text{am}(\alpha s), k) + \left(\frac{E}{K} - \frac{1}{2} \right) \alpha s \right], \quad (5)$$

$$z = \frac{2k}{\alpha} [1 - \text{cn}(\alpha s)] \quad (6)$$

となる. ここで, $E(\varphi, k)$ は第2種の楕円関数, $Z(\varphi, k)$ はヤコビのゼータ関数, $\varphi = \text{am}(\alpha s)$ は振幅関数, $K(k)$, $E(k)$ はそれぞれ第1種および第2種の完全楕円積分, $\text{cn}(\alpha s)$ はヤコビの楕円関数である. 「板が容器の側壁に直交する」との条件を課して求めたモードのいくつかを図9に示す. 力学的には, 粒層の最下層輪郭がここで述べた変形モードであるが, 実験で観測されたもの(図2)はこの上に層厚がほぼ一定の粒層が乗り, 有限な厚みをもった撓み波になっていると考えられる.

3.2 密度波の伝播と撓み波

前節では, 粒状体の層を弾性体とみなし, 水平方向の圧縮により生じる座屈のモードを考察した. しかし, これは静的な力の釣り合いの形であり, アーチ状の山と谷の交代する動的な振舞いを記述しているわけではない. 現実には図7に示したような密度波の伝播が表面変形に関わっている. これを調べるために, 密度 ρ^* , 体積弾性率 K^* の弾性体の板(厚さ h) の一端に撃力(圧力 p_0) を与え, それに伴う圧縮波の伝播を初期値問題として調べた. 詳細は参考文献 19 に譲り, 結果のみを示す. 粒層に沿った変位 u は, 微小変位を

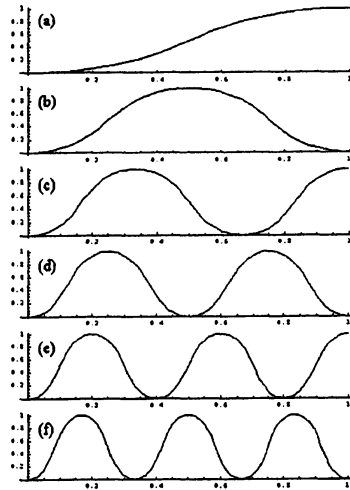


Figure 9: 撓み波のモード. 上から順に $A_1, S_1, A_2, S_2, A_3, S_3$. (参考文献 18 より)

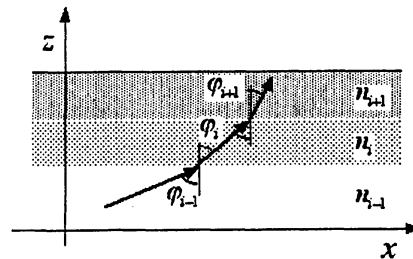


Figure 10: 弾性波の屈折.

仮定して

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4cp_0}{\pi(2m+1)K^*} \cos(q_{2m+1}z) \int_{\xi}^t J_0 \left(q_{2m+1}c\sqrt{\tau^2 - \xi^2} \right) d\tau, \quad t > \frac{x}{c} \quad (7)$$

$$\xi = \frac{x}{c}, \quad q_n = \frac{\pi n}{2h}, \quad c = \sqrt{\frac{K^*}{\rho^*}}$$

で与えられる. ここで J_0 は 0 次の第 1 種ベッセル関数である. 鉛直方向の変位や応力分布も同様の近似の範囲内で求められる. とくに応力が局所的に高まったところで座屈や粒層の破壊とスパイク状に突出した変位が説明できる.

3.3 密度波の曲がり

さざ波の発生と維持機構に関する実験的な知見 (図 8), すなわち, 厚い粒層においては密度波の伝播速度が鉛直方向の位置によって異なり, 底面に近い領域では大きく, 表面付近では小さいという観測結果から, われわれは弾性波の屈折 (曲がり) を考慮したモデルを提案する.

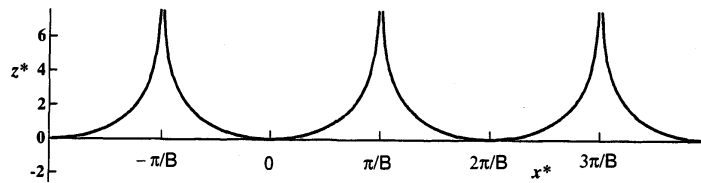


Figure 11: 密度波の伝播曲線. (参考文献 21 より)

図 10 は伝播速度の異なる媒質の境界で弾性波が屈折する様子を描いたものである。これを速度分布が連続的に変化する場合に拡張し、波面に垂直な方向を連ねた曲線の方程式を求めると

$$n(z) \sin \varphi = \text{const} \quad (8)$$

となる。ただし、 $n(z)$ は屈折率で、媒質中の波の伝播速度 $v(z)$ とは $n(z) = v_0/v(z)$ の関係 (v_0 は基準に選んだ点での伝播速度) にある。これは幾何光学における「光線」、あるいは地球の内部構造を推定するために全球規模で地震波の伝播を論じるときの「走時曲線」の考え方と同様である。式 (8) は

$$\sin \varphi = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}},$$

を考慮して

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{v}\right)^2 - 1} \quad (9)$$

となり、その解は $v(z)$ が与えられれば決定される。

体積弾性率 K^* と密度 ρ^* を用いると $v = \sqrt{K^*/\rho^*}$, $p = -K^* \text{div } \mathbf{u}$ であり、粒状体中では第 1 近似として局所的な応力の釣り合いが成立しているので、 $K^* \propto 1/\text{div } \mathbf{u}$ と評価できる。また、さざ波が充分成長する前の段階では粒層は平坦な状態にあるので密度 ρ^* はほぼ一定である。そこで、図 8 の例のさざ波の成長過程において粒層の膨張率を測定すると $\text{div } \mathbf{u} \propto \exp(Bz/d)$ の関係が認められた。そこで

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{Bz}{2d}\right), \quad (10)$$

と仮定すると、式 (9) の解として

$$\frac{z}{d} = -\frac{2}{B} \log \left| \cos \left[\frac{B}{2d}(x - x_0) \right] \right|. \quad (11)$$

が得られる。図 11 に一例を示す。これは密度波の伝播曲線であるが、 z が無限大となる位置では粒層表面での応力の釣り合いが破れ、表面変形が生じることになる。その空間的周期が波長 λ :

$$\lambda = \frac{2\pi d}{B} \quad (12)$$

になると考えられ、図 8 の例での実測値 $d = 1.0 \text{ mm}$, $B \approx 0.2$ を代入すると $\lambda \approx 30 \text{ mm}$ という妥当な結果が導かれる。ここで述べたモデルでは、波長は伝播速度の分布を決めるパラメータ B だけに依存し、層厚 h には依存しない。

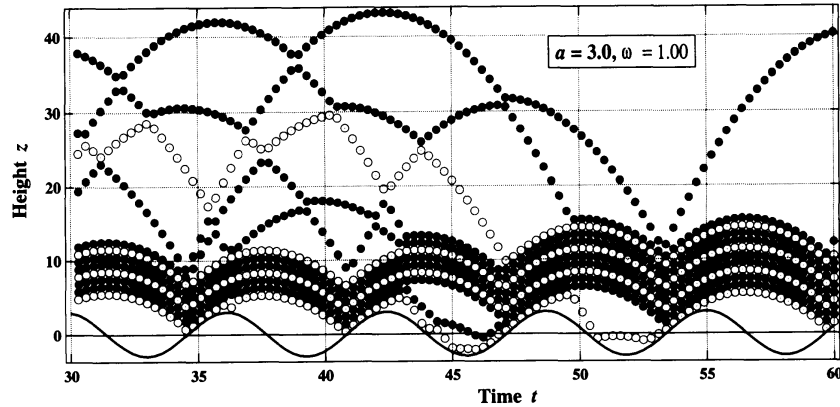


Figure 12: 1次元粒子系 (粒子数 $N = 12$) の衝突. 横軸は時間. 最下段の曲線は正弦振動をしている壁. 粒子間のはね返り係数は $e = 0.95$, 粒子と壁の間では $e' = 0.95$.

3.4 密度波の伝播速度

伝播速度の分布を決めるパラメータ B が一般にどのような条件で決まるのかを探るために粒子の衝突モデルを考えてみよう. 簡単のために大きさも質量も等しい N 個の粒子が鉛直方向に1次元的に配列しており, その座標を $z_i (i = 1, \dots, N)$ とする. また, 壁の位置座標を z_0 とする. 粒子間, および粒子と壁の間のはね返り係数をそれぞれ e, e' とすると, 衝突前の速度 (v_0, v_1, \dots, v_N) と衝突後の速度 (u_0, u_1, \dots, u_N) との関係は

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 + e' & -e' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - e & 1 + e \\ 1 + e & 1 - e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \end{pmatrix}, \quad i = 2, \dots, N \quad (14)$$

で与えられる. 空気との摩擦などは無視し, 一様な重力加速度の下で落下と衝突を繰り返すものとする. 粒子径と重力加速度を単位の大きさに選び, 時間や外力の振動数と振幅はこれらを用いてスケールしてある. 同様の計算はLudingら²²⁾によってすでに解析がなされているが, ここでは別の観点から再計算をしている. われわれは前述のモデル計算を, 適当な初期条件から始め, 充分時間が経過した後それぞれの粒子の位置座標の平均値と標準偏差を求めて, 波長の粒子数 N , はね返り係数 e, e' , 外部振動の振動数 f と振幅 a に対する依存性を調べた. 計算はまだ進行中ではあるが, いくつかの結果を以下に示す.

図12は粒子の衝突過程の一例であり, 多重衝突の様子が伺える. 底面に隣接する粒子を除いて, 下層部の粒子の変動は小さく, 上層部の粒子の変動が大きい. 図13は粒層内の高さ z と膨張率の逆数の関係を示したもので, 後者は弾性波の伝播速度の2乗に比例する. 図13(a)は粒子数 N 依存性で, N が10以上での粒子の振舞いは類似している. また, 図13(b)は $N = 12$ の場合について, 粒子間のはね返り係数 $e (= e')$ 依存性を示したものであるが, e が0.98から減少するにつれ, 粒子の跳躍の高さは減少していくものの, 理論モデル3.3の $B/2$ に対応する勾配はある範囲内でほぼ一定のように見える.

図14は, 与えられた振動数 $f (= \omega/(2\pi))$, 振幅 a において, 図13の曲線を式(10)のような指数関数で近似したときの係数 B の等高線を示す. これは図3におけるパターン出現領域と比肩されるものである. 係数 B のいくつかの特徴的な場合に対応した粒子群の軌道を(a)-(d)に示した. 加振加速度が小さい場合(図14(a))には, 粒子群はほぼ一塊になって上下運動をしており, $B \approx 0$ である. 振動数や振幅を増加させていくと, 上層部

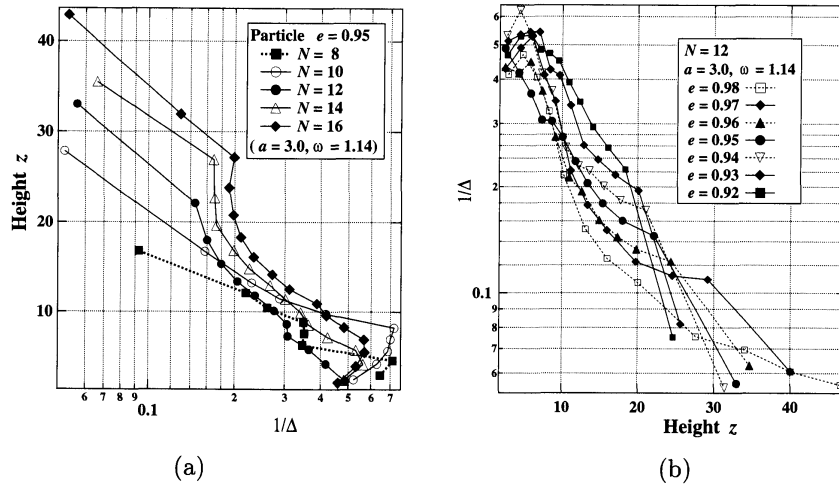


Figure 13: 1次元粒子系の衝突. $1/\Delta$ は膨張率の逆数で弾性波の伝播速度の2乗に比例する. (a) 粒子数 N 依存性 (e, e' および f, a は固定), (b) はね返り係数 $e(=e')$ 依存性 (f, a, N は固定).

の粒子の変動, したがって B の値も大きくなる. これを考慮し, 指数関数による最良近似を得るにあたっては, 下層部でほとんど変動のない粒子と自由飛行に近い挙動を示す最上粒子は除外した. 一般に粒状体層の変形を特徴づけるマクロな界面の輪郭を考えると, 最も短い波長, すなわち最も大きな B に対応したさざ波が支配的なので, B の値が連続的に分布していたとしても, その近傍での極大値に対応したさざ波が観測されと考えられる. したがって, 加振加速度を増加させていくと, B の1つの極大値 [図 14(b)] に対応する $f/2$ -ripple が, ついでつぎの極大値 [図 14(c)] に対応する $f/2$ -ripple が実現されていく. しかし, さらに加振加速度を増加させていくと, 図 14(d) のようにふたたび衝突の位相が揃い, B の値は小さくなる. これより大きな加速度では, $f/4$ -ripple に移行する. なお, N, e, e' などの条件を変えると, f, a プロットの定性的な結果は変わらないが, B のピークの位置や大きさなどの分布の詳細は変化する.

4 おわりに

われわれは, 粒子層の“衝突の位相”や“流動領域の時間的空間的変動”という, これまで考慮されていなかった側面に光をあてて解説し, 実験との比較を試みた. 4~5層程度の薄い粒状体の層では加振により層全体が流動化し, これまで提案されてきたような流体的なモデル^{23,24)}で記述できる. しかし, 10層程度よりも厚い粒状体の層で内部の領域を均一にするためにはかなり大きな加速度の加振が必要になり, それ以下では, 内部に“固体相”と“流体相”が共存する. 固体領域では, 容器底面との衝突により強く圧密された部分が密度波となって伝わるが, その速さは強く圧密された層下部ほど大きいので, 波の伝播方向は屈折し上方に曲がっていく. 粒状体表面で波数ベクトルが鉛直上向きに入射する部分では表面粒子が跳躍し, この波が途切れるので, こうした境界間の距離がさざ波の波長に対応すると考えられる. 外部から与えた加振の振動数 f , 振幅 a に対して, 同じ加速度振幅 $\Gamma \equiv 4\pi^2 f^2 a / g$ をもつ点は連続的に存在するが, このうち B が極大になる点に対応した波が支配的になる. 与えられた層厚 N において f, a の組が前述の極大点に一致しない場合には, N より小さな層における B の極大点が選ばれ, 下方にある残された粒子群は“固化”することになる. これが, 鉛直に加振した粒状体の表面変形について, 現在までのわれわれの知見を下に推測されるシナリオである.

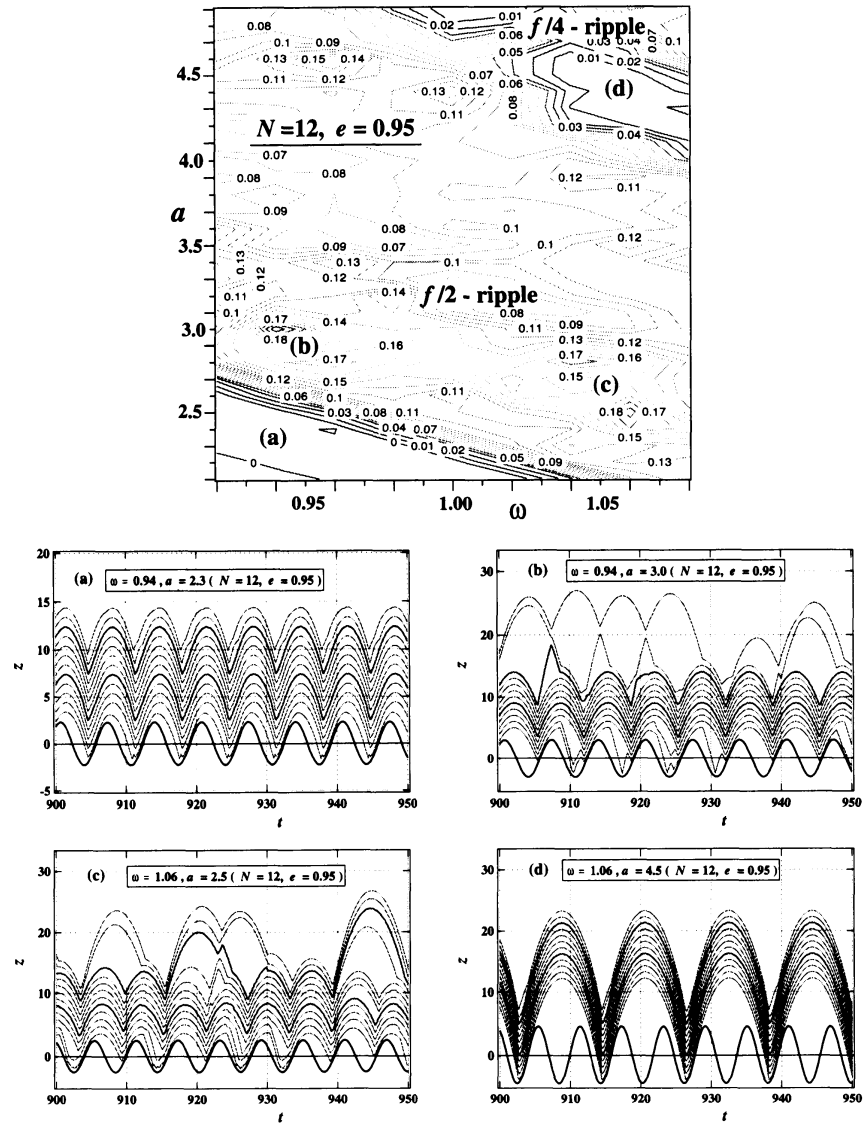


Figure 14: 係数 B の振動数 $f(=\omega/(2\pi))$, 振幅 a 依存性. ($N = 12, e = e' = 0.95$ は固定). 下の図 (a)-(d) は等高線図に示した各点に対応する粒子軌道の例.

5 参考文献

- (1) M. Faraday : *Philos. Trans. R. Soc. London* **52**, 299 (1831).
- (2) H. M. Jaeger & S. R. Nagel: *Science* **255**, 1523 (1992); *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1259 (1996).
- (3) G. B. Lubkin : *Phys. Today* **48** (no.10), 17 (1995).
- (4) S. Douady, S. Fauve & C. Laroche: *Europhys. Lett.* **8**, 621 (1989).
- (5) H. K. Pak & R. P. Behringer : *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1832 (1993).
- (6) A. Goldshtein, M. Shapiro, L. Moldavsky & M. Fichman: *J. Fluid Mech.* **287**, 349 (1995).
- (7) E. Clément, L. Vanel, J. Rajchenbach & J. Duran : *Phys. Rev.* **E53**, 2972 (1996).
- (8) K. M. Aoki & T. Akiyama : *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4166 (1996).
- (9) F. Melo, P. Umbanhowar & H. L. Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **72**, 172 (1994).
- (10) F. Melo, P. Umbanhowar & H. L. Swinney : *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3838 (1995).
- (11) P. Umbanhowar, F. Melo & H. L. Swinney: *Nature* **382**, 793 (1996).
- (12) T. H. Metcalf, J. B. Knight & H. Jaeger: *Physica A* **236**, 202 (1997).
- (13) P. Umbanhowar & H. L. Swinney: *Physica A* **274**, 344 (2000).
- (14) O. Sano, A. Ugawa & K. Suzuki: *Forma* **14**, 321 (1999).
- (15) A. Ugawa & O. Sano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, 2815 (2002).
- (16) A. Ugawa & O. Sano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **72**, 1390 (2003).
- (17) K. Kanai, A. Ugawa & O. Sano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, 1457 (2005).
- (18) O. Sano: *Phys. Rev.* **E72**, 051302 (2005).
- (19) O. Sano: *AIP Proceedings* **1145**, 729 (2009).
- (20) O. Sano: *AIP Proceedings* **1227**, 100 (2010).
- (21) O. Sano: *J. Phys. Soc. Jpn.* **80**, 034402 (2011).
- (22) S. Luding, E. Clément, A. Blumen, J. Rajchenbach, & J. Duran: *Phys. Rev.* **E49**, 1634 (1994).
- (23) E. Cerda, F. Melo & S. Rica: *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4570 (1997).
- (24) J. D. Goddard & A. K. Didwania: *Mech. Materials* **41**, 637 (2009).